

Grundlegende Übungsaufgaben Analysis/Lineare Algebra

Elias Fierke

Juli 2024

1 Lineare Algebra II

1. Berechnen Sie die Ausdrücke.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -2 & -4 & 7 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

2. Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme.

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 4x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$$

4. Berechnen Sie die Produkte der folgenden Matrizen mit den jeweiligen Skalaren.

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $-2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

c) $0.5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

d) $-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

e) $10 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

5. Teilen Sie die folgenden Polynome.

a) $x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ durch $x - 1$

b) $2x^4 - 3x^3 + x - 5$ durch $x + 2$

c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ durch $x - 2$

d) $4x^3 + 0x^2 - 2x + 1$ durch $2x + 1$

e) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ durch $x - 1$

2 Analysis II

1. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

- a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
- b) $f(x) = 5x^3 - 4x + 7$
- c) $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$
- d) $f(x) = e^x + \ln(x)$
- e) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

2. Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale der folgenden Funktionen.

- a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
- b) $f(x) = 5x^3 - 4x + 7$
- c) $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$
- d) $f(x) = e^x + \ln(x)$
- e) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

3. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

- a) $y' = 3x^2, y(0) = 1$
- b) $y' = e^x, y(1) = 0$
- c) $y' = \sin(x), y(0) = 2$
- d) $y' = \frac{1}{x}, y(1) = -1$
- e) $y' = x^2 + 2x + 1, y(0) = 3$

4. Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion der folgenden Funktionen durch.

- a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$
- b) $f(x) = e^x - x$
- c) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

5. Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion der folgenden Funktionen in \mathbb{R}^2 durch.

- a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
- b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_2$

6. Lösen Sie die folgenden Summen auf.

- | | |
|--------------------------|------------------------------------|
| a) $\sum_{i=1}^n i$ | f) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$ |
| b) $\sum_{i=1}^n i^2$ | g) $\sum_{i=1}^n (2i + 1)$ |
| c) $\sum_{i=1}^n i^3$ | h) $\sum_{i=1}^n (3i^2 - 2i + 1)$ |
| d) $\sum_{i=0}^n 2^i$ | i) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ |
| e) $\sum_{i=0}^n (-1)^i$ | j) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$ |

7. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

a) $(3x + 5y) - (-2x + 5y)$
b) $(-4x - 7y) - (6x - 3y)$
c) $(2x - 4y) + (-3x + 7y)$
d) $(-5x + 8y) - (-7x - 2y)$
e) $(6x - 9y) + (4x + 3y)$

f) $(-2x + 3y) - (5x - 6y)$
g) $(4x + 2y) + (-6x - 5y)$
h) $(-3x - 4y) - (2x + 7y)$
i) $(5x - 3y) + (-4x + 8y)$
j) $(-7x + 6y) - (3x - 4y)$

8. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_{-1}^1 x^3 dx$

f) $\int_0^e \frac{\ln(x)}{x} dx$

b) $\int_0^2 (2x^2 - 3x + 4) dx$

g) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

c) $\int_0^1 (1 - x^2) dx$

h) $\int_0^4 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx$

d) $\int_0^{\pi/2} \tan(x) dx$

i) $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

e) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

j) $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx$