Übungsbogen

Elias Fierke

September 2025

Dozent: Enders, Hanisch
Modul: Lineare Algebra und Analysis II
Thema: Definitionen
4. Fachsemester
Universität Potsdam, Campus Golm

Die enthaltenen Fragestellungen decken nicht den gesamten Inhalt ab und sind in keiner Form mit der Klausur verbunden.

Inhaltsverzeichnis

I Lineare Algebra II **3**

1 Determinanten & Geometrie **3**
1.1 Determinaten und Eigenschaften . . . 3
1.2 Permutationen und Leibnizformel . . . 5
1.3 Determinantenmultiplikationssatz und inverse Matrix . . . 6
1.4 Determinanten von linearen Abbildungen . . . 7
1.5 Orientierungen . . . 8
1.6 Affine Unterräume und Abbildungen . . . 9
1.7 Volumina . . . 10

2 Diagonalisierbarkeit **12**
2.1 Polynome und ihre Nullstellen . . . 12
2.2 Eigenwerte & Eigenvektoren . . . 14
2.3 Diagonalisierung . . . 15

3 Bilinearformen, Skalarprodukte und ihre Geometrie **16**
3.1 Bilineare Abbildungen und Bilinearformen . . . 16
3.2 Euklidische Vektorräume und Orthogonalität . . . 17
3.3 Orthogonale und selbstadjungierte Abbildungen . . . 19
3.4 Jenseits euklidischer Skalarprodukte . . . 20

II Analysis II 22

4 Anwendungen der Differenzialrechnung **22**
4.1 Notwendige Bedingung für lokale Extrema . . . 22
4.2 Mittelwertsatz . . . 23
4.3 Satz von Taylor . . . 24
4.4 Konvexe Funktionen . . . 25

5 Das Integral **26**
5.1 Unter- und Obersummen . . . 26
5.2 Riemann-Summen . . . 28
5.3 Sätze über integrierbare Funktionen . . . 29
5.4 Wichtige Ungleichungen . . . 30
5.5 Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . 31
5.6 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . 31
5.7 Integrationsmethoden . . . 32
5.8 Uneigentliche Integrale . . . 32

6 Gewöhnliche Differentialgleichungen **33**
6.1 Charakterisierung der Exponentialfunktion . . . 33
6.2 Trigonometrische Funktionen . . . 34
6.3 Definitionen und Geometrische Interpretation Gewöhnlicher Differentialgleichungen 35
6.4 Lineare Skalare Anfangswertprobleme Erster Ordnung . . . 36
6.5 Separable Differentialgleichungen . . . 36

7 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ **37**
7.1 Normierte Vektorräume und metrische Räume . . . 37
7.2 Topologie . . . 38
7.3 Konvergenz und Stetigkeit . . . 40
7.4 Kurven im $\mathbb{R}^m$ . . . 41
7.5 Partielle Differenzierbarkeit . . . 43
7.6 Totale Differenzierbarkeit . . . 45
7.7 Lokale Extrema . . . 46

Teil I

Lineare Algebra II

1 Determinanten & Geometrie

1.1 Determinaten und Eigenschaften

1.1.1 Rekapitulation: Definieren Sie die Begriffe *Körper* und *K-Vektorraum.*

1.1.2 Definieren Sie die *Determinantenabbildung* und benennen Sie grob die Axiome D1 - D3.

1.1.3 Wann heißt die Determinantenabbildung *linear in der i-ten Zeile*?

1.1.4 Benennen Sie grob die Axiome D4 - D8.

1.1.5 Wie entsteht eine Streichungsmatrix A_{ij}^{Str}?

1.2 Permutationen und Leibnizformel

1.2.1 Definieren Sie den Begriff *Transposition*.

1.2.2 Definieren Sie den Begriff *Permutation*.

1.2.3 Wie ist das *Vorzeichen* für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert?

1.2.4 Was ist der *Fehlstand* einer Permutation?

1.2.5 Wie ist das *Signum* einer Permutation σ definiert?

1.2.6 Geben Sie die *Leibnizformel* an.

1.3 Determinantenmultiplikationssatz und inverse Matrix

1.3.1 Beschreiben Sie kurz die Aussage des *Determinantenmultiplikationssatzes* für zwei Matrizen A und B.

1.3.2 Wie berechnet sich die *Determinante der Inversen*?

1.3.3 Was kann zum Vergleich der *Determinanten ähnlicher Matrizen* gesagt werden?

1.3.4 Was sagt die *Cramer'sche Regel* aus?

1.4 Determinanten von linearen Abbildungen

1.4.1 Rekapitulation: Definieren Sie den Begriff *Endomorphismus*.

1.4.2 Rekapitulation: Definieren Sie den Begriff *Darstellende Matrix*.

1.4.3 Wie ist die *Determinante eines Endomorphismus* definiert?

1.5 Orientierungen

1.5.1 Wann heißen zwei Basen *gleichorientiert*? Wann *entgegengesetzt orientiert*?

1.5.2 Wie sind *Orientierungen* definiert?

1.5.3 Differenzieren Sie zwischen *positiver* und *negativer* Orientierung.

1.5.4 Geben Sie die allgemeine *Standardorientierung* an.

1.5.5 Was ist ein *Automorphismus*?

1.5.6 Wann heißt ein Automorphismus *orientierungserhaltend*?

1.6 Affine Unterräume und Abbildungen

1.6.1 Wie nennt man $X + v := v + X := \{x + v | x \in X\}$ für eine Teilmenge $X \subset V$ eines K-Vektorraums und einen Vektor $v \in V$?

1.6.2 Definieren Sie den Begriff *affiner Unterraum*.

1.6.3 Wie ist die *Dimension* eines affinen Unterraums definiert?

1.6.4 Für welche Dimension heißt ein affiner Unterraum Gerade/Ebene/Hyperebene?

1.6.5 Wie ist eine *affine Abbildung* definiert?

1.6.6 Was sind *linearer*- und *Translationsanteil* einer *affinen Abbildung*?

1.6.7 Rekapitulation: Definieren Sie die Begriffe *Bild, Urbild*.

1.7 Volumina

1.7.1 Wie nennt man eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$, wenn

a) $\exists R > 0 : \forall x \in X : ||x|| \leq R$

b) Für alle Folgen (x_n) mit $x_n \in X$ gilt:

$$(x_n) \text{ konvergiert gegen } x \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad x \in X$$

c) beide oberen Eigenschaften zutreffen

1.7.2 Geben Sie die Voraussetzungen eines *n-dimensionalen Volumens* an.

1.7.3 Definieren Sie den Begriff *Parallelotop*.

1.7.4 Wann ist ein Parallelotop *nicht ausgeartet*?

1.7.5 Was ist ein *euklidisches Dreieck*?

1.7.6 Geben Sie den *verallgemeinerten Zylinder* der Höhe h über X an.

2 Diagonalisierbarkeit

2.1 Polynome und ihre Nullstellen

2.1.1 Welcher Ausdruck repräsentiert ein *Polynom* in X mit Koeffizienten in K?

2.1.2 Geben Sie die *Menge aller Polynome* in X mit Koeffizienten K an.

2.1.3 Was ist eine *formale Potenzreihe* in X mit Koeffizienten K?

2.1.4 Geben Sie die *Menge aller formalen Potenzreihen* mit Koeffizienten in K an.

2.1.5 Wie ist der *Grad* eines Polynoms definiert?

2.1.6 Wie heißt ein Polynom $p \in K[X]$ der Form $p = X^j$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$?

2.1.7 Geben Sie die Abbildung des *Auswertehomomorphismus* an.

2.1.8 Was gilt $\forall f, g \in K[X]$ und $\lambda \in K$ in Bezug auf den Auswertehomomorphismus?

2.1.9 Was ist die *Nullstelle* eines Polynoms?

2.1.10 Was ist der *Linearfaktor*?

2.1.11 Definieren Sie den Begriff *Vielfachheit* einer Nullstelle $\lambda \in K$ von f.

2.1.12 Wie sieht die allgemeine *Linearfaktorzerlegung* aus?

2.2 Eigenwerte & Eigenvektoren

2.2.1 Was ist ein *Eigenwert* eines Endomorphismus?

2.2.2 Definieren Sie den Begriff *Eigenvektor*.

2.2.3 Was ist ein *Eigenraum*?

2.2.4 Was ist die *geometrische Vielfachheit*?

2.2.5 Geben Sie die Definition des *charakteristischen Polynoms* an.

2.3 Diagonalisierung

2.3.1 Wann ist eine Matrix *diagonalisierbar*?

2.3.2 Definieren Sie den Begriff *algebraische Vielfachheit* einer Nullstelle λ.

2.3.3 Wann ist eine Summe von Untervektorräumen *direkt*?

3 Bilinearformen, Skalarprodukte und ihre Geometrie

3.1 Bilineare Abbildungen und Bilinearformen

3.1.1 Wann ist eine Abbildung *bilinear*?

3.1.2 Was ist eine *Bilinearform*?

3.1.3 Definieren Sie das *Kreuzprodukt.*

3.1.4 Wann ist eine bilineare Abbildung *symmetrisch*?

3.1.5 Wann ist eine bilinieare Abbildung *schief-/antisymmetrisch*?

3.1.6 Was ist die *quadratische Form* einer Bilinearform?

3.2 Euklidische Vektorräume und Orthogonalität

3.2.1 Wann ist eine symmetrische Bilinearform *positiv definit*?

3.2.2 Wie wird eine *positiv definite symmetrische Bilinearform* noch bezeichnet?

3.2.3 Wie bezeichnet man das Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, wobei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist?

3.2.4 Wie ist die *Norm* von $v \in V$ aus $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ definiert?

3.2.5 Nennen Sie die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*.

3.2.6 Nennen Sie die *Dreiecksungleichung*.

3.2.7 Was ist die *Innenwinkelgröße* des Winkels zwischen v und w für $v, w \in V\backslash\{0\}$?

3.2.8 Wann sind zwei Vektoren *orthogonal* zueinander?

3.2.9 Was ist das *orthogonale Komplement* von X für $\emptyset \neq X \subset V$?

3.2.10 Definieren Sie die Begriffe *Orthonormalsystem* und *Orthonormalbasis*.

3.2.11 Was ist eine *orthogonale Projektion*?

3.2.12 Definieren Sie die *Gram-Schmidt-Orthonomierung*.

3.3 Orthogonale und selbstadjungierte Abbildungen

3.3.1 Wann ist eine Abbildung *orthogonal*?

3.3.2 Wann ist eine Matrix *orthogonal*?

3.3.3 Wann ist eine Matrix *speziell-orthogonal*?

3.3.4 Wann heißt eine Abbildung *selbstadjungiert*?

3.4 Jenseits euklidischer Skalarprodukte

3.4.1 Sei V ein komplexer Vektorraum.

a) Wie ist die *Sesquilinearform* definiert?

b) Wann ist eine Sesquilinearform *hermitesch*?

c) Wann ist eine hermitesche Sesquilinearform *positiv definit*?

d) Wie wird eine eine *positiv definite, hermitesche Sesquilinearform* noch genannt?

e) Wie nennt man (V, h)?

3.4.2 Was ist die *darstellende Matrix bzgl.* β für eine Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$?

3.4.3 Nennen Sie die sechs Formen der Definitheit und geben Sie kurz die Bedingung für eine symmetrische Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ an.

Teil II

Analysis II

4 Anwendungen der Differenzialrechnung

4.1 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

4.1.1 Definieren Sie den Begriff *Globales Extremum.*

4.1.2 Unterscheiden Sie zwischen *golbalem Minimum* und *globalem Maximum.*

4.1.3 Definieren Sie den Begriff *lokales Extremum.*

4.1.4 Unterscheiden Sie zwischen *lokalem Minimum* und *lokalem Maximum.*

4.1.5 Benennen Sie das *notwendige Kriterium für lokale Extrema differenzierbarer Funktionen.*

4.2 Mittelwertsatz

4.2.1 Geben Sie die Aussage des *Satzes von Rolle* an.

4.2.2 Was sagt der *Mittelwertsatz der Differenzialrechnung* aus?

4.2.3 Wann ist eine differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *monoton wachsend*? Wann *monoton fallend*?

4.2.4 Benennen Sie das *hinreichende Kriterium für lokale Extrema*.

4.3 Satz von Taylor

4.3.1 Was besagt der *Satz von Taylor*?

4.3.2 Geben Sie die *Regel von l'Hospital* wieder.

4.4 Konvexe Funktionen

4.4.1 Wann ist eine Funktion *konvex*?

4.4.2 Wann ist eine Funktion *kokav*?

4.4.3 Wann ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ *monoton wachsend*?

5 Das Integral

5.1 Unter- und Obersummen

5.1.1 Wie ist eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ definiert?

5.1.2 Wie ist die *Länge* eines Intervalls definiert?

5.1.3 Wann gilt eine Zerlegung Z' als *Verfeinerung* einer Zerlegung Z?

5.1.4 Was ist die *Feinheit* einer Zerlegung?

5.1.5 Definieren Sie die *Darboux'sche Untersumme*.

5.1.6 Ergänzen Sie die die unter den selben Kriterien stehende Definition der *Darboux'schen Obersumme*.

5.1.7 Was ist das *Unterintegral*?

5.1.8 Was ist darauf hin das *Oberintegral*?

5.1.9 Wann ist eine Funktion *(Riemmann-)integrierbar*?

5.1.10 Geben Sie die allgemeine Form des *(Riemann-)Integrals* an.

5.1.11 Vervollständigen Sie das *Riemann-Integrabilitätskriterium*: Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemmann-integrierbar, wenn...

5.2 Riemann-Summen

5.2.1 Vervollständigen Sie den *Satz von Du Bois-Reymond und Darboux*: Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn...

5.2.2 Definieren Sie den Begriff *Riemann-Summe*.

5.2.3 Wann ist eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, wenn ein $I \in \mathbb{R}$ existiert?

5.3 Sätze über integrierbare Funktionen

5.3.1 Wann heißt eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}$ *gleichmäßig stetig*?

5.3.2 Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f integrierbar. ____________________

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, dann ist f stetig. ____________________

$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$ ____________________

$\int_a^a f(x)dx := 1$ ____________________

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, ...

...dann gilt: $\int_a^b f^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \forall x \in [a, b]$ ____________________

...dann gilt für $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$: $\int_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \forall x \in [a, b]$ ____________________

5.4 Wichtige Ungleichungen

5.4.1 Sind Funktionswerte der Funktion f für alle $x \in [a, b]$ kleiner gleich derer der Funktion g, dann gilt für das Integral der Funktionen:

5.4.2 Stellen Sie die *Dreiecksungleichung* für Integrale dar.

5.4.3 Geben Sie die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* an.

5.5 Mittelwertsatz der Integralrechnung

5.5.1 Geben Sie die Aussage des *Mittelwertsatzes der Integralrechnung* wieder.

5.6 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

5.6.1 Wiederspiegeln Sie den ersten Teil des *Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.*

5.6.2 Was ist eine *Stammfunktion*?

5.6.3 Wiederspiegeln Sie den zweiten Teil des *Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.*

5.7 Integrationsmethoden

5.7.1 Was besagt die *Substitutionsregel*?

5.7.2 Wie führen Sie *partielle Integration*?

5.8 Uneigentliche Integrale

5.8.1 Definieren Sie den Begriff *uneigentliches Integral*.

6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

6.1 Charakterisierung der Exponentialfunktion

6.1.1 Geben Sie die Charakteristische Differentialgleichung für exp sowie ihre Voraussetzungen an.

6.1.2 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x)\exp(-x) =$ ______

6.1.3 Für alle $x > 0$ ist $\exp(x) > 1$, für alle $x < 0$ ist ______

6.1.4 Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x + y) =$ ______

6.2 Trigonometrische Funktionen

6.2.1 Geben Sie den *Trigonometrischen Pythagoras* (Kreisgleichung) an.

6.2.2 Geben Sie die Charakteristische Differentialgleichung für sin und cos inklusive der zugehörigen Voraussetzungen an.

6.2.3 Nennen Sie die geltenden *Additionstheoreme* in Bezug auf trigonometrische Funktionen.

6.2.4 Wie viele Nullstellen hat cos im Intervall $(0, 2)$? ______

6.3 Definitionen und Geometrische Interpretation Gewöhnlicher Differentialgleichungen

6.3.1 Was ist ein Offenes Intervall?

6.3.2 Definieren Sie den Begriff *skalare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.*

6.3.3 Geben Sie die Aussage des *Anfangswertproblem Erster Ordnung* wieder.

6.4 Lineare Skalare Anfangswertprobleme Erster Ordnung

6.4.1 Was ist ein *Homogenes, Lineares, Skalares Anfangswertproblem Erster Ordnung*?

6.4.2 Was ist ein ***In**homogenes, Lineares, Skalares Anfangswertproblem Erster Ordnung*?

6.5 Separable Differentialgleichungen

6.5.1 Was ist eine *Differentialgleichung mit getrennten Variablen*?

7 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

7.1 Normierte Vektorräume und metrische Räume

7.1.1 Was ist die *Norm*?

7.1.2 Welche Eigenschaften erfüllt die *Normabbildung*?

7.1.3 Wie ergibt sich daraus ein *normierter Vektorraum*?

7.1.4 Wenden Sie die *Dreiecksungleichung* auf die Norm an.

7.1.5 Was ist die *Metrik*?

7.1.6 Welche Eigenschaften erfüllt die *Metrikabbildung*?

7.1.7 Wie ergibt sich daraus ein *metrischer Raum*?

7.2 Topologie

7.2.1 Geben Sie die allgemeine Formel einer *offenen Kugel* mit Radius r an.

7.2.2 Was besagt das *Hausdorffsche Trennungsaxiom*?

7.2.3 Geben Sie die Definition einer *offenen Menge* sowohl formal, als auch in Ihren eigenen Worten wieder.

7.2.4 Wann ist eine Menge *abgeschlossen*?

7.2.5 Wie ist der *Rand* einer Menge definiert?

7.2.6 Was ist das *Innere* einer Menge?

7.2.7 Was ist der *Abschluss* einer Menge?

7.2.8 Geben Sie den allgemeinen *Durchmesser* einer Menge an.

7.2.9 Wie ist die *Kompaktheit* einer Menge definiert?

7.2.10 Was besagt der *Satz von Heine-Borel*?

7.3 Konvergenz und Stetigkeit

7.3.1 Geben Sie die Definition einer *Folge im* $\mathbb{R}^n$ an.

7.3.2 Wann *konvergiert* eine Folge im $\mathbb{R}^n$?

7.3.3 Geben Sie die Aussage des *Satzes von Bolzano-Weierstraß* wieder.

7.3.4 Wann heißt eine Folge *stetig*?

7.3.5 Nennen Sie das *Kriterium der Stetigkeit*.

7.4 Kurven im $\mathbb{R}^m$

7.4.1 Definieren Sie den Begriff *Kurve im* $\mathbb{R}^n$.

7.4.2 Wann ist eine Kurve im $\mathbb{R}^m$ differenzierbar?

7.4.3 Was ist eine *Reguläre Kurve*?

7.4.4 Was ist der *Schnittwinkel*?

7.4.5 Definieren Sie den Begriff *Bogenlänge*.

7.4.6 Was ist eine *Parametertransformation*?

7.5 Partielle Differenzierbarkeit

7.5.1 Wann heißt eine reellwertige Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in U$ *partiell differenzierbar*?

7.5.2 Definieren Sie den *Gradienten einer Funktion.*

7.5.3 Was ist eine *Richtungsableitung*?

7.5.4 Was ist eine *höhere partielle Ableitung*?

7.5.5 Geben Sie die Aussage des *Satzes von Schwarz* wieder.

7.6 Totale Differenzierbarkeit

7.6.1 Wann ist eine Funktion *total differenzierbar*?

7.6.2 Erläutern Sie, was die Aussage der *Kettenregel* ist.

7.6.3 Ergänzen Sie diese zur *Kettenregel für reellwertige Verkettung.*

7.7 Lokale Extrema

7.7.1 Definieren Sie den Begriff *lokales Maximum* in Bezug auf Funktionen im $\mathbb{R}^n$.

7.7.2 Drehen Sie die Definition so, dass es ein *lokales Minimum* definiert.

7.7.3 Was ist ein *Kritischer Punkt*?

7.7.4 Nennen Sie das *notwenige Kriterium für lokale Extrema* in Bezug auf Funktionen im $\mathbb{R}^n$

7.7.5 Definieren Sie die *Hesse-Matrix*.

