



Übungsbogen

Elias Fierke

September 2025

Dozent: Raum, Pooya
Modul: Algebra und Zahlentheorie
Thema: Definitionen
4. Fachsemester
Universität Potsdam, Campus Golm

Die enthaltenen Fragestellungen decken nicht den gesamten Inhalt ab und sind in keiner Form mit der Klausur verbunden.

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppentheorie	2
1.1 Gruppen und Untergruppen	2
1.2 Symmetrische Gruppe	3
1.3 Gruppenhomomorphismen	4
1.4 Kerne und Normalteiler	4
1.5 Nebenklassen und Quotienten	5
1.6 Homomorphie- und Isomorphiesatz für Gruppen	6
1.7 Gruppenwirkungen	6
2 Kommutative Ringe, Körper und Zahlentheorie	8
2.1 Ringe und Körper	8
2.2 Ideale, Ringhomomorphismen, Quotientenringe	9
2.3 Ringhomomorphismen	9
2.4 Quotientenringe	10
2.5 Primideale und maximale Ideale	10

1 Gruppentheorie

1.1 Gruppen und Untergruppen

1.1.1 Definieren Sie den Begriff *Halbgruppe*

1.1.2 Inwiefern ergänzen *Monoide* und *Gruppen* die *Halbgruppe*?

1.1.3 Nennen Sie zwei Beispiele für *Gruppen*.

1.1.4 Notieren Sie, wann eine Gruppe als *abelsch* gilt.

1.1.5 Definieren Sie den Begriff *Untergruppe*

1.1.6 Geben Sie allgemein die *erzeugende Menge* einer Gruppe an.

1.1.7 Sei G eine Gruppe und G' die zugehörige *Kommutatorgruppe*. Geben Sie G' an. Was gilt für *abelsche Gruppen*?

1.1.8 Wie nennt man eine *Gruppe* G , für es $g \in G$ gibt, sodass $G = \langle g \rangle$.

1.1.9 Wie nennt man die *Kardinalität* $|G|$ einer Gruppe G ? Welche *Bedingung* gibt es?

1.2 Symmetrische Gruppe

1.2.1 Geben Sie die Definition einer *Permutation* an.

1.2.2 Was ist ein *Zykel*?

1.2.3 Geben Sie den *Träger* einer Permutation $\sigma \in \text{Sym}(X)$ an.

1.2.4 Erklären Sie die Eigenschaft *disjunkt* am Beispiel einer Permutation.

1.3 Gruppenhomomorphismen

1.3.1 Definieren Sie den Begriff *Homomorphismus*.

1.3.2 Definieren Sie den Begriff *Gruppenhomomorphismus*.

1.3.3 Rekapitulation: Definieren Sie die Begriffe *injektiv*, *surjektiv*, *bijektiv*.

injektiv

surjektiv

bijektiv

1.3.4 Geben Sie die Bedingungen für einen *Monoidhomomorphismus* an.

1.3.5 Wie wird ein *bijektiver Gruppenhomomorphismus* genannt?

1.3.6 Was ist ein *Gruppenautomorphismus* in Bezug auf einen *Gruppenisomorphismus* G ?

1.4 Kerne und Normalteiler

1.4.1 Definieren Sie den *Kern* eines Gruppenhomomorphismus

1.4.2 Definieren Sie den Begriff *Normalteiler*.

1.5 Nebenklassen und Quotienten

1.5.1 Definieren Sie den Begriff *Linksnebenklasse*.

1.5.2 Geben Sie anschließend die *allgemeine Form* einer Rechtsnebenklasse an.

1.5.3 Nennen Sie drei *Beispiele* für Nebenklassen.

1.5.4 Sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Was gibt der *Index* $[H : G]$ an?

1.5.5 Was besagt der *Satz von Lagrange*?

1.5.6 Was besagt der *Kleine Satz von Fermat*?

1.6 Homomorphie- und Isomorphiesatz für Gruppen

1.6.1 Beschreiben Sie die Aussage des *Homomorphiesatzes*.

1.6.2 Was besagt der erste *Isomorphiesatz*?

1.7 Gruppenwirkungen

1.7.1 Definieren Sie die *Wirkung* auf eine Menge.

1.7.2 Was besagt der *Satz von Cayley*?

1.7.3 Definieren Sie den *Stabilisator*. Wann ist die Wirkung *frei*, wann ist sie *treu*?

1.7.4 Was ist die *G-Bahn*? Wann ist die Wirkung *transitiv*?

1.7.5 Wann heißen zwei Wirkungen *konjugiert* zueinander?

1.7.6 Geben Sie die *Bahnformel* an.

2 Kommutative Ringe, Körper und Zahlentheorie

2.1 Ringe und Körper

2.1.1 Definieren Sie das mathematische Konstrukt *Ring*.

2.1.2 Wann heißt ein Ring *Eins*?

2.1.3 Wann heißt ein Ring *kommutativ*?

2.1.4 Wann ist ein Ring ein *Körper*?

2.1.5 Was sind Ringerweiterung und Unterring für eine Inklusion $R \subseteq S$ von Ringen?

2.1.6 Rekapitulation: Was sind der *i-te Koeffizient* und der Grad eines Polynoms $f = \sum_n a_n X^n \in R[X]$?

2.1.7 Definieren Sie den Begriff *Nullteiler* in einem Ring. Was ist der Integritätsbereich?

- 2.1.8 Wie wird ein (*multiplikativ*) *inverses Element* in einem Ring R genannt? Wie bezeichnet man die *Teilmenge* aller jener (*multiplikativ*) inversen Elemente von R ?
-

2.2 Ideale, Ringhomomorphismen, Quotientenringe

- 2.2.1 Definieren Sie den Begriff *Ideal*.

- 2.2.2 Was ist ein *Hauptideal*?

- 2.2.3 Wie bezeichnet man den *Integritätsbereich* R , wenn jedes Ideal in R ein Hauptideal ist?

2.3 Ringhomomorphismen

- 2.3.1 Nennen Sie die *Kriterien* für einen Ringhomomorphismus ψ für eine Abbildung $\psi : R \rightarrow S$ zwischen zwei Ringen.

- 2.3.2 Wie ist der *Kern* eines Ringhomomorphismus definiert?

2.4 Quotientenringe

2.4.1 Definieren Sie den Begriff *Quotientengruppe*.

2.4.2 Definieren Sie den Begriff *Quotientenabbildung*.

2.5 Primideale und maximale Ideale

2.5.1 Wann kann ein Ideal *Primideal* genannt werden?

2.5.2 Wann heißt ein Ideal *maximal*?

2.5.3 Sei R Integritätsbereich und $p \in R \setminus \{0\}$ Nichteinheit. Wann heißt p irreduzibel?
